

低频多模式超声兰姆波超薄层状横观各向同性 复合材料定征方法: 理论与实验*

张 锐 万明习 李 刚

(西安交通大学电子与信息工程学院生物医学工程系 西安 710049)

CAO Wenwu

(*Intercollege Materials Research Laboratory, Pennsylvania State University, University Park PA 16802*)

1999 年 6 月 7 日收到

1999 年 8 月 2 日定稿

摘要 研究使用低频多模式超声兰姆波估计超薄层状横观各向同性复合材料的弹性常数、密度和厚度等参数的方法。这里“超薄”的概念是指材料厚度远小于材料中的声波波长，导致在时域上材料前后界面的各次回波信号相互混迭。文章分析了沿平行和垂直于纤维两种方向上，在超薄层状横观各向同性复合材料中传播的低频兰姆波的色散特性，提出在最小二乘意义下以材料多模式兰姆波色散曲线为基础的反向算法对材料进行了参数估计，文中分析了影响估计准确性的各种因素，研究了方法对材料各参数的灵敏度及其在误差传递中的意义，建立了评判反演材料参数准确度的理论依据，结合超声泄漏兰姆波频域分析方法并使用超声耦合剂耦合方式和一对中心频率为 2 MHz 的宽带纵波换能器，实验结果证实该方法能够准确估计的单向玻璃纤维增强聚醚醚酮 (PES) 的材料参数。

PACS 数: 43.35, 43.60

Low frequency ultrasonic multi-mode Lamb wave method for characterizing the ultra-thin transversely isotropic laminate composite: theory and experiment

ZHANG Rui WAN Mingxi LI Gang

(*Department of Biomedical Engineering, Xi'an Jiaotong University Xi'an 710049*)

CAO Wenwu

(*Intercollege Materials Research Laboratory, Pennsylvania State University, University Park PA 16802*)

Received Jun. 7, 1999

Revised Aug. 2, 1999

Abstract A low-frequency multi-mode ultrasonic Lamb wave method suitable for characterizing elastic stiffness tensors, thickness and density of the ultra-thin transversely isotropic laminate composite is presented. The "ultra-thin" there means that the thickness of the plate is only a fraction of the ultrasound wavelength. The dispersion properties of the low frequency Lamb wave propagating along and parallel to the fiber direction are derived, which is the basis of the multi-mode Lamb wave characterization method. In conjunction with the method of least square, the secant algorithm is used to estimate the parameters of the ultra-thin fiber-reinforced composite layer. The reasons for evaluation error of the parameters and the sensitivity of the method to different parameters are analyzed. Using the ultrasound coupler and a pair of broadband longitudinal wave transducers with 2 MHz center frequency, we can successfully estimate the parameters of the ultra-thin glass fiber reinforced PES composite layer with by employing the leaky guided wave frequency-domain analysis method.

* 本文受中国国家自然科学基金和美国 Office of Naval Research (Grant: # N00014-93-1-0340) 资助

引言

层状横观各向同性复合材料,如单向纤维增强复合材料或单向拉伸高聚物等,在声学、材料科学、信息科学和生物医学工程等众多领域被广泛应用与研究,利用超声波对其声学、力学与界面特性等进行原位和无损地定量估计日益引起国内外学者的重视,且针对不同的问题产生了许多新的检测方法和技术,目前部分已达到定量检测的水平^[1-6]。

在许多应用场合中,层状横观各向同性复合材料很薄,这里‘薄’的概念是指覆层厚度 h 小于其中的超声波波长 λ ,当采用传统的脉冲-回波方法对其进行原位测试时,无法在时域上区分材料前后界面的各次回波信号^[7-12]。虽然可以使用频带更宽和频率更高的单脉冲超声波来测量厚度越来越小的样品,例如,当复合材料厚度为 $10\ \mu\text{m}$ 左右时,使用频率为 $150\ \text{MHz}$ 以上的超声波进行检测,但是如此高频率的超声波检测系统,需要使用特制的高频换能器和相应的宽带处理设备,从而使检测系统的成本大大提高,另外,材料中的各种微结构对超声波的散射将干扰回波信号,使声学参数的测量变得困难,我们希望寻找一种方便准确的低频超声波多参数定征方法,能够对超薄横观各向同性复合材料进行更为全面的估计。

与传统体积波方法对应,具有多种传播模式和色散特性和沿薄层传播的兰姆波是一种超声波导波,其传播特性与材料的声速、厚度、密度、弹性常数和纤维方向等多种参数有着密切的关系^[13-23]。信号中蕴涵的信息远多于传统体积波方法,可以用来对层状横观各向同性复合材料进行多参数的定征。本文提出结合平行与垂直纤维方向零阶对称兰姆波色散特性为基础的低频多模式兰姆波定征方法和在最小二乘意义下以色散曲线为基础的反向算法对超薄单向纤维增强复合材料的厚度、密度和弹性常数等参数进行估计,分析了影响估计准确性的各种因素,研究了方法对材料各参数的灵敏度及其在误差传递中的意义,建立了评判反演材料参数准确度的理论依据。实验结果与理论符合的非常好。

1 方法

1.1 低频多模式兰姆波定征方法

超薄层状横观各向同性复合材料具有与六角对称晶体非常类似的弹性特征,可用 5 个独立的弹性

常数来表征,分别是 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{13} 和 C_{14} 。假设复合材料纤维方向或高聚物单向拉伸方向平行于坐标系中 z 轴, x 轴垂直于超薄层的表面,且层状复合材料沿 y 轴与 z 轴方向无限延伸。在此坐标系下,当超声兰姆波传播方向平行于 z 轴, y 轴方向上位移梯度为零情况下,可以将 x 轴和 z 轴方向上的位移假设为如下形式:

$$U_1 = U_{10} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}, \quad (1)$$

$$U_3 = U_{30} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}, \quad (2)$$

式中, k_x 是兰姆波波数沿 z 轴方向的分量, $k_x = \omega/v_x$, $\omega = 2\pi f$, f 是入射超声波的频率, v_x 即兰姆波沿 z 轴方向的传播速度。结合运动方程、描述横观各向同性复合材料应力-应变关系的广义虎克定理和位移-应变关系的几何方程可得:

$$\rho \omega^2 U_{10} = C_{11} U_{10} k_x^2 + (C_{13} + C_{44}) U_{30} k_x k_z + C_{44} U_{10} k_z^2, \quad (3)$$

$$\rho \omega^2 U_{30} = C_{44} U_{30} k_x^2 + (C_{13} + C_{44}) U_{10} k_x k_z + C_{33} U_{30} k_z^2. \quad (4)$$

在 (3) 和 (4) 式中,令 k_x 为基本变量,可以解出兰姆波波数沿 x 轴的分量, k_{xp} 和 k_{xm} , 以及 U_{10} 和 U_{30} 的比例 R_p 和 R_m , R_p 和 R_m 分别是将 k_{xp} 和 k_{xm} 代入下式的结果:

$$R = \left(\frac{U_{10}}{U_{30}} \right) = \frac{(C_{13} + C_{44}) k_x k_z}{\rho \omega - C_{11} k_x^2 - C_{44} k_z^2}. \quad (5)$$

据此,可以进一步假设沿 x 轴和 z 轴方向上的位移为下式所示:

$$U_1 = e^{i(k_x z - \omega t)} [M e^{i k_{xp} x} + N e^{-i k_{xp} x} + P e^{i k_{xm} x} + Q e^{-i k_{xm} x}], \quad (6)$$

$$U_3 = e^{i(k_x z - \omega t)} [R_p (M e^{i k_{xp} x} - N e^{-i k_{xp} x}) + R_m (P e^{i k_{xm} x} - Q e^{-i k_{xm} x})]. \quad (7)$$

在 $M = -N$ 、 $P = -Q$ 和 $M = N$ 、 $P = Q$ 条件下,上式分别表达对称与反对称模式兰姆波位移形式。另外,兰姆波必须满足在薄板两个表面, $Z = \pm d/2$, 上的正应力和切应力为零这四个边界条件,将 (6) 和 (7) 式代入这四个边界条件,可得:

$$\begin{bmatrix} G_p V_p & G_p/V_p & G_m J_p & G_m/J_p \\ G_p/V_p & G_p V_p & G_m J_p & G_m/J_p \\ H_p V_p & -H_p/V_p & H_m J_p & -H_m/J_p \\ H_p/V_p & -H_p V_p & H_m/J_p & -H_m J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \\ P \\ Q \end{bmatrix} = 0, \quad (8)$$

其中, $G_p = C_{11} R_p k_{xp} + C_{13} k_x$, $H_p = k_{xp} + k_x R_p$, $G_m = C_{11} R_m k_{xm} + C_{13} k_x$, $H_m = k_{xm} + k_x R_m$ 。为

使上式成立, 应使方程左端行列式为零, 分别获得对称模式兰姆波和反对称模式兰姆波的色散方程如下所示:

$$f_z(\rho, d, C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{44}, f, v_z) = \frac{\operatorname{tg}(k_{xp}d/2)}{\operatorname{tg}(k_{xm}d/2)} - \left[\frac{G_p H_m}{G_m H_p} \right]^{\pm 1} = 0. \quad (9)$$

方程右端取 '+' 号代表对称模式兰姆波色散特性, 取 '-' 号代表非对称模式兰姆波色散特性。

同理, 当超声兰姆波传播方向平行于 y 轴情况下, 表达超薄层状横观各向同性复合材料超声兰姆波传播特性的色散方程形式与公式 (9) 十分类似, 如下式所示:

$$f_y(\rho, d, C_{11}, C_{12}, f, v_y) = \frac{\operatorname{tg}(k_{xp}d/2)}{\operatorname{tg}(k_{xm}d/2)} - \left[\frac{G_p H_m}{G_m H_p} \right]^{\pm 1} = 0, \quad (10)$$

其中 '+' 和 '-' 号含义与 (9) 式相同, 但此时式中的 $G_p = C_{11}R_p k_{xp} + C_{12}k_y$, $G_m = C_{11}R_m k_{xm} + C_{12}k_y$, $H_p = k_{xp} + k_y R_p$, $H_m = k_{xm} + k_y R_p$, R_p 和 R_m 由下式解出:

$$\begin{cases} R_p = \frac{(C_{12} + C_{66})k_{xp}k_y}{\rho\omega^2 - C_{11}k_{xp}^2 - C_{66}k_y^2}, \\ R_m = \frac{(C_{12} + C_{66})k_{xm}k_y}{\rho\omega^2 - C_{11}k_{xm}^2 - C_{66}k_y^2}, \end{cases} \quad (11)$$

其中的 k_y 是兰姆波波数沿 y 轴方向的分量, $k_y = \omega/v_y$, v 即兰姆波沿 Y 轴方向的传播速度。 k_x 是兰姆波波数沿 x 轴方向的分量, 令 k_y 为基本变量, k_{xp} 和 k_{xm} 通过下式求解:

$$(C_{12} + C_{66})^2 k_x^2 k_y^2 = (\rho\omega^2 - C_{11}k_y^2 - C_{66}k_x^2)(\rho\omega^2 - C_{11}k_x^2 - C_{66}k_y^2). \quad (12)$$

复合材料的参数估计即是通过在最小二乘误差意义上材料的低频兰姆波色散曲线与理论色散特性方程的比较, 估算出材料的声学参数值, 材料参数的实验估计值应使下式取得最小值:

$$E(p) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|f_z(\rho, d, C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{44}, f, v_z)\|^2, \quad (13)$$

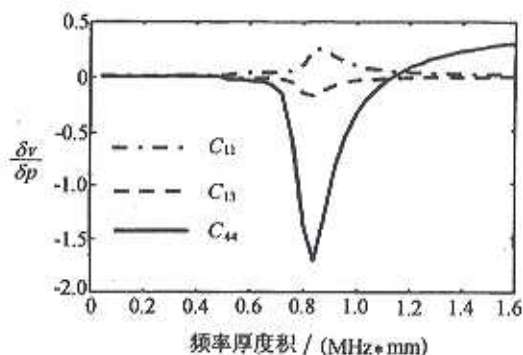
$$E(p) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|f_y(\rho, d, C_{11}, C_{12}, f, v_y)\|^2, \quad (14)$$

其中 p 为待估计参数, $j = 1, \dots, N$ 是待测材料厚度与发射及接收时传感器频宽乘积带内对应的速度扫描点数。我们使用割线法解出使公式 (13) 和 (14)

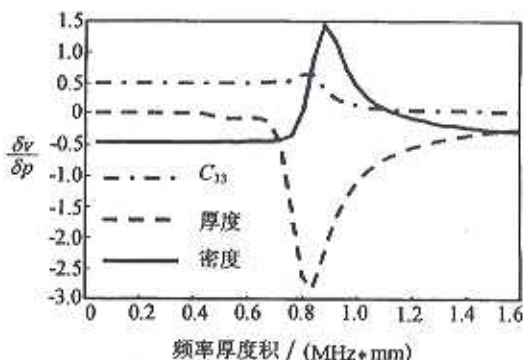
中 $E(p)$ 为最小的材料参数值, 迭代初值为材料参数的预估值, 在材料参数真值的约 $\pm 30\%$ 范围内。

1.2 灵敏度分析

可以看出, 沿 z 轴方向和沿 y 轴方向传播的兰姆波, 都与超薄层状横观各向同性复合材料的密度、厚度和 C_{11} 有关, 而其它的 4 个常数 C_{11} 、 C_{13} 、 C_{33} 和 C_{44} 分别只与沿 z 轴方向或沿 y 轴方向传播的兰姆波有关。而在存在一定速度测量误差的前提下, 两种方法对各参数的定征准确度是与兰姆波波速对各参数的灵敏度有关的。为此, 我们研究了两种方法对各参数的灵敏度函数, 由于兰姆波色散特性方程是超越函数, 难以直接获得各参数对兰姆波波速的偏导数, 所以借助计算机直接得到各参数增大百分之一条件下, 兰姆波波速的相对改变量, 以研究材料参数与兰姆波波速之间的灵敏度关系。如图 1 所示为沿 z 轴方向传播的对称模式兰姆波对 ρ 、 d 、 C_{11} 、 C_{13} 、 C_{33} 和 C_{44} 的灵敏度随频率厚度积变化的曲线。



(a) C_{11} 、 C_{13} 和 C_{44} 灵敏度



(b) C_{33} 、厚度和密度灵敏度分析

图 1 沿 z 轴传播低频超声兰姆波定征方法

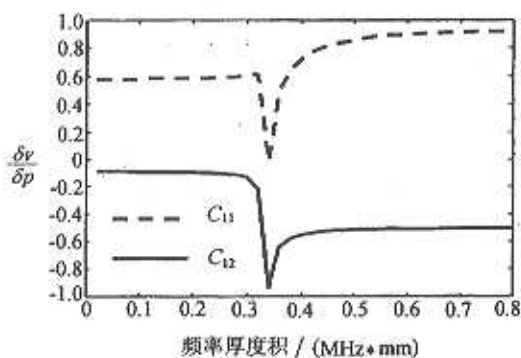
对薄层复合材料参数的灵敏度分析

(材料: 单向玻璃纤维增强聚醚醚酮 (PES))

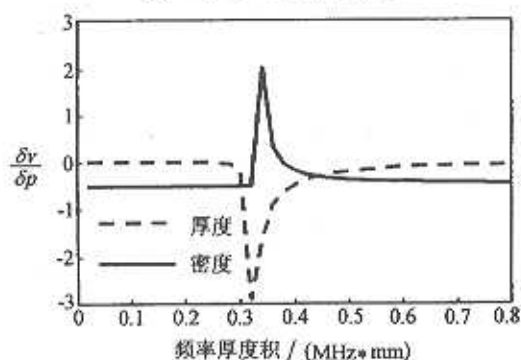
由图 1 可以看出, 若使用一定频率的换能器对超薄层状横观各向同性复合材料样品进行检测时, 兰姆波对不同参数的灵敏度随厚度的不同而改变,

但不成比例关系, 即并非灵敏度随材料厚度的增大而增大。实际上, 当材料的厚度大到一定程度时, 方法的灵敏度几乎下降为零, 这是由于当复合材料厚度很大时, 材料中传播的波就转化为几乎没有色散的瑞利面波。

图 2 所示为沿 y 轴方向传播的对称模式兰姆波对 ρ 、 d 、 C_{11} 和 C_{12} 的灵敏度随频率厚度积变化的曲线。综合图 1 和图 2, 可以清楚的看到, z 轴方法和 y 轴方法对材料厚度和密度的灵敏度分别在不同的频率厚度积位置取得较大的值。但沿 y 轴传播低频超声兰姆波对 C_{11} 的灵敏度较大。所以可以总结出如下结论, 沿 z 轴方向传播的对称模式兰姆波适合用来对 ρ 、 d 、 C_{13} 、 C_{33} 和 C_{44} 进行定征, 而沿 y 轴方向传播的对称模式兰姆波可以对 ρ 、 d 、 C_{11} 和 C_{12} 进行定征。



(a) C_{11} 和 C_{12} 灵敏度分析



(b) 厚度和密度灵敏度分析

图 2 沿 y 轴传播低频超声兰姆波定征方法
对薄层复合材料参数的灵敏度分析
(材料: 玻璃纤维增强聚醚砜 (PES))

2 实验

2.1 实验系统

实验测试系统如图 3 所示。一对精密匹配和中心频率为 2 MHz 的纵波宽带压电换能器, T 和 R , 相

对倾斜地放置于待测材料的同侧, 发射换能器 T 的入射角度、接收换能器 R 的接收角度、换能器之间及它们与材料之间的距离、以及兰姆波的传播方向都由一套精密机械控制装置控制, 角度分辨率为 0.5° 。换能器与待测样品之间通过超声耦合剂耦合, 测量系统在计算机的控制下, 触发脉冲发生器 CTS-5 产生尖脉冲激励发射换能器, CTS-5 将接收换能器收到的信号经内部放大器预放后送至 TDS-724C 型数字示波器进行采样, 示波器的采样频率 $Sr = 100$ MHz 是预先设定的。

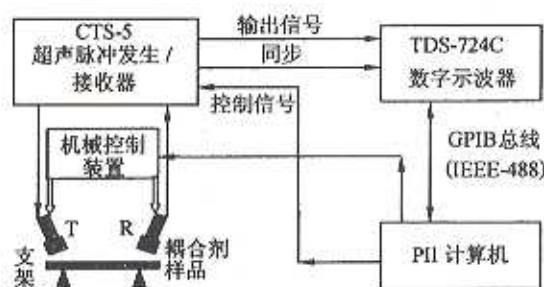


图 3 实验测量系统原理框图

为了减小随机噪声对实验结果的影响, 数字示波器持续进行了 15 min 的多次采样, 并且一边采样, 一边将采样信号进行平均。最后, 平均后的采样信号通过 GPIB(IEEE-488) 总线送入计算机做进一步分析。实验的测试样品为单向玻璃纤维增强聚醚砜 (PES), 其厚度是在美国宾夕法尼亚州购买时由商家提供的, 我们使用电子测厚仪对厚度参数进行了校准, 仪器的测量误差是 $2.54 \mu\text{m}$ 。密度参数是使用阿基米德原理测量的, 样品厚度和密度的参考值在实验结果的表 1 和表 2(见第三节) 中附带给出。为避免温度变化对实验的影响, 整个实验在恒温环境中进行, 吸水水槽内的水温控制在 $23 \pm 0.1^\circ\text{C}$ 。

2.2 漏兰姆波频域分析方法

正确调整系统传感器与材料空间位置并获取漏兰姆波信号之后, 通过分析信号的频谱, 可以发现, 由于传感器波束宽度与发射信号带宽的影响, 接收到的漏兰姆波信号也是宽带信号, 并且在频域上存在一些峰值点, 这些谱峰即意味着此频率处的漏兰姆波信号的声速是发射信号主轴方向与材料表面的临界角对应的兰姆波声速。以沿 z 轴方向传播兰姆波为例, 兰姆波速度由下式决定:

$$v_x = \frac{v_c}{\sin(\theta)}$$

式中, v_c 是超声耦合剂中声速, θ 为超声波入射角。所以, 漏兰姆波频谱方法的核心是控制入射及接

收角度以选择和决定何种模式的兰姆波以多大的速度沿弹性薄层传播, 再确定此速度的兰姆波对应的频率成分, 精确控制入射波入射角度, 在一段角度范围内以一定角度间隔改变入射角, 并记录不同入射角处的频率峰值点, 就可以得到材料的色散曲线。

如图 4 所示为厚度为 $244 \mu\text{m}$ 单向玻璃纤维增强聚醚砜 (PES) 实验样品的实验色散数据, 其中的星号点是实验测量兰姆波色散实验数值, 实线和虚线分别对应于通过计算得到的样品理论色散曲线, 样品参数的理论值使用体积波方法对同样材料制成的厚样品进行测试得到。

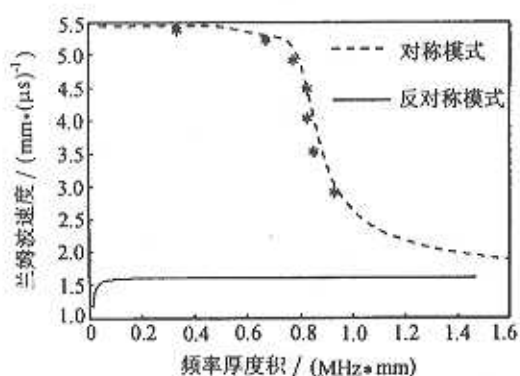
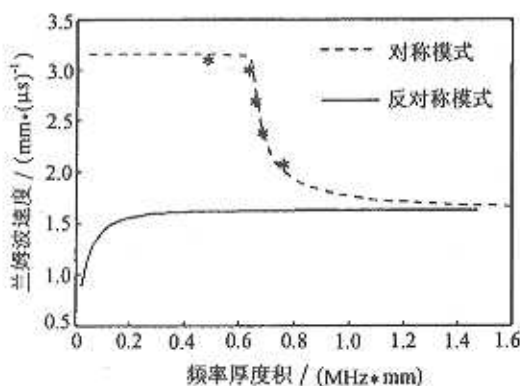
(a) 沿 z 轴传播(b) 沿 y 轴传播

图 4 兰姆波色散特性实验数据对薄层复合材料参数的灵敏度分析

(材料: 单向玻璃纤维增强聚醚砜 (PES)) $h = 244 \mu\text{m}$

3 实验结果与讨论

如表 1 和表 2 所示分别为使用沿 z 轴和 y 轴方向的低频对称模式兰姆波对样品进行参数估计的结果。

综合表 1 和表 2 可以看出, 沿 z 轴方向和 y 轴方向低频兰姆波定征方法均可对 $h < 0.1\lambda$ 的超薄层状单向纤维增强复合材料材料厚度和密度进行定征, 但沿 y 轴方向方法对 C_{11} 的准确度较高。

表 1 沿 z 轴方向低频兰姆波定征方法对材料参数的估计结果

样品参数	体积波方法	沿 z 轴方向低频兰姆波定征方法	
h/mm	0.244	0.250	2.3%
$\rho/(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$	1.650	1.691	2.4%
C_{11}/GPa	18.22	16.99	-6.7%
C_{13}/GPa	2.45	2.55	4.1%
C_{33}/GPa	50.34	49.23	-2.2%
C_{44}/GPa	4.54	5.58	0.9%

表 2 沿 y 轴方向低频兰姆波定征方法对材料参数的估计结果

样品参数	体积波方法	沿 y 轴方向低频兰姆波定征方法	
h/mm	0.244	0.247	1.1%
$\rho/(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$	1.650	1.608	-2.5%
C_{11}/GPa	18.22	17.85	-2.0%
C_{12}/GPa	8.94	9.19	2.8%

经过分析发现, 低频兰姆波定征方法对复合材料参数的估计误差主要是由换能器角度分辨率决定的兰姆波速度测量误差引起的, 如图 5 所示为超声波在不同入射角度时可能带来的兰姆波速度测量误差。

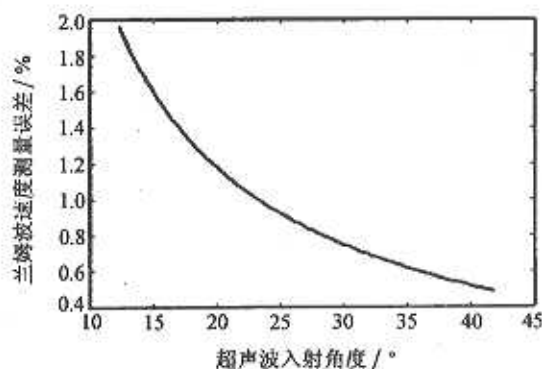


图 5 不同入射角对应的兰姆波速度测量误差

(传感器角度分辨率为 0.5°)

由于实验中的待测材料在低频率厚度积条件下的兰姆波速度对应的角度范围为 16° 左右, 可以看出在此范围中, 存在约 2% 的兰姆波速度误差。其次, 由于待测样品在低频率厚度积条件下的兰姆波速度对应的角度范围是与换能器波束特性、频带特性和双层复合结构超声兰姆波的色散特性等因素有关的, 所以低频超声兰姆波界面特性估计方法的估计误差也与这些因素有着密切的关系。

4 结论

本文通过理论分析和实验验证,证实了一种使用低频超声兰姆波波无损估计超薄层横观各向同性复合材料的参数(厚度、密度和弹性常数等)方法的有效性,该方法得到如下结论:

(1) 低频兰姆波定征方法可以对厚度小于十分之一波长的单向玻璃纤维增强聚醚砜(PES)的参数进行定征。

(2) 根据灵敏度分析,沿 z 轴方向传播的对称模式兰姆波适合用来对 ρ 、 d 、 C_{13} 、 C_{33} 和 C_{44} 进行定征,而沿 y 轴方向传播的对称模式兰姆波可以用来对 ρ 、 d 、 C_{11} 和 C_{44} 进行定征。除 C_{13} 和 C_{12} 参数外,总体定征误差小于2%。

(3) 结合沿 z 轴和沿 y 轴方向传播的对称模式兰姆波定征方法可以对超薄弹性层的厚度、密度和弹性常数等参数进行定征。该定征方法的定征精度和发射、接收换能器频带特性、波束特性、角度分辨率和材料的色散特性等因素有密切的关系。

(4) 低频多模式兰姆波方法可以对其它种类薄层复合材料的声学 and 力学等参数进行定征,通过对方法灵敏度的分析,可以确定不同的定征方案,是作者进一步的工作。

参 考 文 献

- Papadakis E P. Ultrasonic velocity and attenuation: Measurement methods with scientific and industrial applications, in Physical Acoustics Principles and Methods. Mason W P, Thurston R N eds., New York: Academic Press, 1976: 277—374
- Krautkramer J, Krautkramer M. Ultrasonic testing of materials: 4th fully revised edition, Springer Verlag, 1990
- Chang F H, Couchman J C, Yee B G W. Ultrasonic resonance measurements of sound velocity in thin composite laminates. *J. Composite Material*, 1974; 8(10): 356—363
- Cawley P, Adams R. A review of defect types and nondestructive testing techniques for composites for composites and bonded joints. *NDT International*, 1988; 21: 208—222
- Rokhlin S I, Wang W. Critical angle measurement of elastic constants in composite material. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989; 86(5): 1876—1882
- Rokhlin S I, Wang W. Measurements of elastic constants of very thin anisotropic plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1993; 94(5): 2712—2730
- Kinra V K, Zhu C. Time-domain ultrasonic NDE of the wave velocity of a sub-half-wavelength elastic layer. *J. of Testing and Evaluation*, 1993; 21(1): 29—35
- Kinra V K, Iyer V R. Ultrasonic measurement of the thickness, phase velocity, density or attenuation of a thin-viscoelastic plate. Part I: the forward problem. *Ultrasonics*, 1995; 33(2): 95—110
- Kinra V K, Iyer V R. Ultrasonic measurement of the thickness, phase velocity, density or attenuation of a thin-viscoelastic plate. Part II: the inverse problem. *Ultrasonics*, 1995; 33(2): 111—122
- WAN Mingxi, Jiang B, CAO Wenwu. Direct measurement of ultrasonic velocity of thin elastic layers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997; 101(1): 626—628
- 张 锐, 万明习, 钱 明. 超薄弹性层低频超声频域定征方法. 计量学报, 1998; 19(4): 291—298
- 张 锐, 万明习, 巩欣洲, CAO Wenwu. 低频多模式超声兰姆波超薄弹性层定征方法. 计量学报, 1999; 21(1): 1—9
- Nayfeh A H, Chimenti D E. Propagation of guided waves in fluid-coupled plates of fiber-reinforced composite. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988; 83: 1736—1743
- Datta S K, Shah A H, Bratton R L, Chakraborty T. Wave propagation in laminated composite plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988; 83: 2020—2026
- Dayal, Vinay, Kinra, Vikram K. Leaky Lamb waves in an anisotropic plate. I. An exact solution and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989; 85(6): 2268—2276
- Nayfeh A H. The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991; 89: 1521—1531
- Chimenti D E, Martin R W. Nondestructive evaluation of composite laminates by leaky Lamb waves. *Ultrasonics*, 1991; 29(1): 13—17
- Balasubramaniam K, Rose J L. Physically based dispersion curve feature analysis in the NDE of Composite. *J. Research in Nondestructive Evaluation*, 1991; 3: 41—67
- Mal A K, Bar-Cohen Y. Characterization of composite laminates using combined LLW and PBS methods. in *Rev. Prog. QNDE*, 1991: 1555—1560
- Bar-Cohen Y, Mal A K, Lih S S. NDE of composite materials using ultrasonic oblique isonification. *Materials Evaluation*, 1993; 51(11): 1285—1296
- Guo N, Cawley P. Lamb wave reflection for the quick non-destructive evaluation of large composite laminates. *Materials Evaluation*, 1994; 52(3): 404—411
- Rani Warsi Sullivan, Krishnan Balasubramaniam, George Bennett. Plate wave flow patterns for ply orientation imaging in fiber reinforced composites. *Materials Evaluation*, 1996; 54(4): 518—523
- Viktorov I A. Rayleigh and Lamb wave: physical theory and application. New York: Plenum Press, 1967: 117—121